Problemas del segundo capítulo de Álgebra Local

Pedro Sancho de Salas

2003

Problemas

1. Sea $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n$ una cadena de A-submódulos de M. Probar que $l(M/M_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} l(M_{i-1}/M_i)$.

   Resolución:

   $l(M/M_n)$ es el número de eslabones de las cadenas irrefinables que comienzan en M_n y terminan en M, que coincide con la suma de los números de eslabones de las cadenas irrefinables que comienzan en M_i y terminan en M_{i-1}, desde $i = n$ hasta $i = 1$.

2. Sea $A = k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ una k-álgebra de tipo finito y sea $\mathcal{O} = A_x$, donde $x \in \operatorname{Spec} A$ es un punto cerrado. Probar que si M es un $\mathcal{O}$-módulo de longitud finita entonces es un k-espacio vectorial de dimensión finita y
$$\dim_k M = l(M) \cdot \dim_k \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$$

   Resolución:

   Sea $M = M_0 \supset M_1 \supsetneq M_2 \supset \cdots \supset M_n$ una cadena irrefinable de $\mathcal{O}$-submódulos de M. Por tanto, $M_i/M_{i+1} \simeq \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$. Tenemos que
$$\dim_k M = \sum_{i=1}^{n} \dim_k(M_{i-1}/M_i) = n \cdot \dim_k \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x = l(M) \cdot \dim_k \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$$

3. Sea A un anillo íntegro y $f, g \in A$ no nulas. Probar que
$$l_A(A/(fg)) = l_A(A/(f)) + l_A(A/(g))$$

   Resolución:

   La sucesión
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A/(g) \arrow[r, "f\cdot"] & A/(f\cdot g) \arrow[r] & A/(f) \arrow[r] & 0 \\ & \bar{a} \arrow[r] & \overline{fa} & & \\ & & \bar{b} \arrow[r] & \bar{b} & \end{tikzcd}$$
   es exacta, luego $l_A(A/(fg)) = l_A(A/(f)) + l_A(A/(g))$.

4. Probar que si A es un anillo con un número finito de elementos, entonces es un anillo noetheriano de dimensión cero.

   Resolución:

   Obviamente A es un anillo de longitud finita.

5. Escribamos el polinomio $p(x,y)=p_n(x,y)+p_{n+1}(x,y)+\ldots+p_m(x,y)$ como suma de polinomios homogéneos $p_i(x,y)$ de grado i. Sea $\mathcal{O}=(k[x,y]/p(x,y))_{x_0}$, con $\mathfrak{m}_{x_0}=(x,y)$. Demostrar que $G_{\mathfrak{m}_{x_0}}\mathcal{O}=k[x,y]/(p_n(x,y))$. Calcular el polinomio de Samuel de $\mathcal{O}$.

   Resolución:

   $G_{(x,y)}k[x,y]=k[x,y]$ y $p_n(x,y)$ no es divisor de cero en $k[x,y]$, luego $G_{\mathfrak{m}_{x_0}}\mathcal{O}=k[x,y]/(p_n(x,y))$.

6. Sea $\mathcal{O}$ un anillo local noetheriano. Probar que la dimensión de Krull de $\mathcal{O}$ es igual a la dimensión del cono tangente $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}=\underset{n}{\oplus}\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ en el origen (que es el ideal maximal $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}}\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$).

   Resolución:

   $G_{\text{origen}}(G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O})=G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$, por tanto, $\mathcal{O}$ y $G_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}$ tienen el mismo polinomio de Hilbert, luego la misma dimensión de Krull.

7. Sea A un anillo noetheriano. Probar que $\dim A[x]=1+\dim A$ (Obsérvese que si $\mathfrak{p}\subset A$ es un ideal primo entonces $\mathfrak{p}A[x]$ es un ideal primo de $A[x]$).

   Resolución:

   Si $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{p}_n$ es una cadena de ideales primos de A, entonces $(\mathfrak{p}_1)\subset(\mathfrak{p}_2)\subset\cdots\subset(\mathfrak{p}_n)\subset(\mathfrak{p}_n,x)$ es una cadena de ideales primos de $A[x]$, pues $A[x]/(\mathfrak{p}_i)=(A/\mathfrak{p}_i)[x]$ y $A[x]/(\mathfrak{p}_i,x)=A/\mathfrak{p}_i$. Luego, $\dim A[x]\geq 1+\dim A$

   Sea $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{m}_y$ una cadena de ideales primos en $A[x]$, y sea $\mathfrak{p}_{y'}=\mathfrak{m}_x\cap A$. Localizando en y' (es decir, por $A-\mathfrak{p}_{y'}$), podemos suponer que $\mathfrak{p}_{y'}=\mathfrak{m}_{y'}$ es maximal. Ahora bien, $A[x]/(\mathfrak{m}_{y'})=(A/\mathfrak{m}_{y'})[x]$, luego $\mathfrak{m}_y=(\mathfrak{m}_{y'},p(x))$, para cierto polinomio $p(x)$. Teniendo en cuenta la definición paramétrica de dimensión, tenemos que $\dim A[x]_y\leq\dim A_{y'}+1\leq\dim A+1$. Luego, $\dim A[x]\leq\dim A+1$.

8. Sea $\mathcal{O}$ un anillo local noetheriano de dimensión de Krull 2. Probar que el conjunto $\operatorname{Spec}\mathcal{O}$ tiene infinitos puntos. Si A es un anillo noetheriano de dimensión de Krull mayor o igual que dos probar que el conjunto $\operatorname{Spec}A$ tiene infinitos puntos.

   Resolución:

   El número de ideales primos minimales de $\mathcal{O}$ es finito y hay un único ideal primo maximal. Si hubiese un número finito de ideales primos que no son minimales ni maximales (los cuales no están ninguno incluido dentro de otro, por ser $\dim\mathcal{O}=2$) entonces sabríamos construir una función f que no se anula en ninguno de ellos y entonces $\dim\mathcal{O}/(f)\leq\dim\mathcal{O}-2$, lo que es contradictorio.

9. Calcular la dimensión de Krull de $\mathbb{C}[[x,y]]_S$, con $S=\{1,x,\ldots,x^n,\ldots\}$.

   Resolución:

   Observemos que $\dim\mathbb{C}[[x,y]]=2$. $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[[x,y]]_S\subset\operatorname{Spec}\mathbb{C}[[x,y]]$ y no contiene al punto cerrado, luego $\dim\mathbb{C}[x,y]]_S\leq 1$. Tenemos la cadena $(0)\subset(y)$ de ideales primos de $\mathbb{C}[x,y]]$ que no corta con S, luego $\dim\mathbb{C}[x,y]]_S\geq 1$. En conclusión, $\dim\mathbb{C}[x,y]]_S=1$.

10. Sea $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$ un anillo de polinomios de infinitas variables. Sean $\mathfrak{p}_i = (x_{2^i}, \dots, x_{2^{i+1}-1})$ y $S = A - \underset{i}{\cup}\mathfrak{p}_i$.

    (a) Probar que $\operatorname{Spec}_{max} A_S = \{\mathfrak{p}_i \cdot A_S\}_i$.

    (b) Probar que toda función no nula de A_S pertenece a un número finito de ideales maximales.

    (c) Probar que A_S es un anillo noetheriano.

    (d) Probar que $\dim A_S = \infty$. (Nagata)

    Resolución:

    1. Los ideales primos de A_S se corresponden con los ideales primos de A que están incluidos en $A - S = \cup_i \mathfrak{p}_i$.

    Ahora bien, en todo anillo si $I \subseteq \overset{n}{\underset{i}{\cup}}\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_i$ primos, entonces para algún i, $I \subseteq \mathfrak{p}_i$: Si I no está incluido en $n-1$ de ellos, en tal caso existen $f_i \in I$, que no pertenece a $\underset{j \neq i}{\cup}\mathfrak{p}_j$ (pero $f_i \in \mathfrak{p}_i$), entonces $f = \sum_i f_i \in I$ y $f \notin \overset{n}{\underset{i}{\cup}}\mathfrak{p}_i$, contradicción. Luego I está incluido en $n-1$ de ellos y reiterando el argumento está incluido en uno de ellos.

    Dado $f \in \mathfrak{p}$, es obvio que f solo pertenece a un número finito de los $\mathfrak{p}_i$. Por tanto, existe un $\mathfrak{p}_i$ de modo que $\mathfrak{p} \cap k[x_1, \dots, x_{2^n-1}]$ está incluido en $\mathfrak{p}_i \cap k[x_1, \dots, x_{2^n-1}]$ (observemos que $k[x_1, \dots, x_{2^n-1}] \cap \mathfrak{p}_j = 0$, para todo $j \geq n$), para todo n. Luego, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_i$, para este i.

    Ahora ya concluimos que $\operatorname{Spec}_{max} A_S = \{\mathfrak{p}_i \cdot A_S\}_i$.

    2. $\frac{f}{s} \in \mathfrak{p}_i \cdot A_S$ si y sólo si $f \in \mathfrak{p}_i$. Ahora bien, es obvio que f solo pertenece a un número finito de los $\mathfrak{p}_i$.

    3. Sea $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ una cadena ascendente de ideales. I_1 está incluido en un número finito de ideales primos maximales, $\mathfrak{p}_{i_1}, \dots, \mathfrak{p}_{i_n}$, por 2. Denotemos $\mathfrak{p}_{i_j} = \mathfrak{p}_{y_j}$. Para probar que la cadena de ideales ascendente estabiliza basta probarlo localizando en los y_j. Ahora bien, $(A_S)_{y_j} = A_{y_j}$ que es localización de $k(x_r)[x_{2^{i_j}}, \dots, x_{2^{i_j+1}-1}]$, los $x_r \notin \{x_{2^{i_j}}, \dots, xx_{2^{i_j+1}-1}\}$, son noetherianos.

    4. $\dim A_S = \text{supremo } \{\dim A_{y_i}\} = \infty$.

11. Sean X, Y variedades algebraicas. Probar que

    $$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

    (Utilícese el Lema de Normalización de Noether).

    Resolución:

    $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$. Por el Lema de Normalización de Noether, existen morfismos inyectivos finitos $k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow A$, $k[y_1, \dots, y_m] \hookrightarrow B$ (luego $\dim A = n$ y $\dim B = m$).

    Tenemos la composición de morfismos inyectivos finitos

    $$k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k k[y_1, \dots, y_m] \hookrightarrow k[x_1, \dots, x_n] \otimes_k B \hookrightarrow A \otimes_k B$$

    que prueba que $\dim A \otimes_k B = n + m$.

12. Sean Y, Y' subvariedades irreducibles de una variedad algebraica irreducible X. Supongamos que $Y \cap Y' \neq \emptyset$. Demuéstrese que

$$\operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Y' \geq \operatorname{codim}(Y \cap Y')$$

Resolución:

Si $Y \subset X$ son variedades irreducibles se define $\operatorname{codim} Y$ como la máxima longitud de las cadenas de cerrados irreducibles que comienzan en Y y terminan en X, que coincide con $\dim X - \dim Y$. Si $Y = \cup Y_i$, Y_i irreducible entonces se define $\operatorname{codim} Y$ como el mínimo de las $\operatorname{codim} Y_i$, que coincide con $\dim X - \dim Y$.

Sea $x \in Y \cap Y'$ un punto cerrado. Sea f una función de X que se anule en todos los puntos de Y, pero no en todos los puntos de Y'. Sea H una de las componentes irreducibles de $(f)_0$ que pase por Y. Tenemos que $\dim H = \dim X - 1$, $Y \subset H$, y $Y' \cap H = Y'_1 \cup \cdots \cup Y'_n$, con Y'_i irreducibles y $\dim Y'_i = \dim Y' - 1$ (pues son unas cuantas de las componentes irreducibles de $Y' \cap (f)_0$). Ahora ya, por inducción sobre $\dim X$, tenemos que en H,

$$\operatorname{codim}(Y'_i \cap Y) \leq \operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Y'_i$$

luego en X,

$$\operatorname{codim}(Y'_i \cap Y) - 1 \leq \operatorname{codim} Y - 1 + \operatorname{codim} Y'_i - 1 = \operatorname{codim} Y - 1 + \operatorname{codim} Y'$$

Ahora ya como $Y \cap Y' = Y \cap Y' \cap H = Y \cap (\cup Y'_i)$, concluimos.

13. Sea $f \colon X \to Y$ un morfismo entre variedades algebraicas irreducibles. Sea $y \in f(X)$ un punto cerrado. Demuéstrese que

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim \overline{f(X)}$$

Resolución:

Podemos suponer que $\overline{f(X)} = Y$. Sea $\dim Y = n$. En un entorno de y, tenemos que $y = \{g_1 = 0, \dots, g_n = 0\}$, luego en un entorno de $f^{-1}(y)$, tenemos que $f^{-1}(y) = \{g_1 \circ f = 0, \dots, g_n \circ f = 0\}$. Luego,

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - n = \dim X - \dim \overline{f(X)}$$

14. Sea $A = k[\xi_1, \dots, \xi_n]$ un anillo graduado, con $\operatorname{gr} \xi_i = 1$. Probar

   (a) Si $\mathfrak{p} \subset A$ es un ideal primo, el ideal generado por los elementos homogéneos de $\mathfrak{p}$ es un ideal primo.

   (b) Los ideales primos minimales de A son ideales primos homogéneos

   (c) $\dim A = \dim A_{or}$, donde $\mathfrak{m}_{or} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

   (d) $\dim A - 1$ es igual al grado del polinomio $p(n) = \dim_k [A]_n$.

Resolución:

1. Sea $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo y $\mathfrak{p}'$ el ideal generado por los elementos homogéneos de $\mathfrak{p}$. Obviamente $\mathfrak{p}'$ es un ideal homogéneo. Para ver que es primo basta probar que si $a, b \in A$ son elementos homogéneos tales que $a \cdot b \in \mathfrak{p}'$, entonces $a \in \mathfrak{p}'$ ó $b \in \mathfrak{p}'$. Ahora, bien $a \cdot b \in \mathfrak{p}$, luego $a \in \mathfrak{p}$ ó $b \in \mathfrak{p}$, por tanto $a \in \mathfrak{p}'$ ó $b \in \mathfrak{p}'$.

2. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal, el ideal primo homogéneo generado por los elementos homogéneos de $\mathfrak{p}$ al estar incluido en $\mathfrak{p}$ ha de coincidir con él, luego $\mathfrak{p}$ es homogéneo.

3. La dimensión de una variedad algebraica es el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles. A su vez, la dimensión de una variedad algebraica irreducible es la dimensión del anillo de gérmenes de cualquiera de sus puntos cerrados. En el caso que nos ocupa, por 2., todas las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec} A$ contienen al origen, luego $\dim A = \dim A_{or}$.

4. El polinomio $p(n) = \dim_k [A]_n$ coincide con el polinomio de Hilbert de A_{or}, luego por 3. hemos acabado.